Maths Expertes **Contrôle $n°1$ du Vendredi 20/09/2024** Thiaude P.
Durée : 20 minutes **Calculatrice interdite**
(total sur 10 pts)

Exercice 1 [4 points]
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $7|11^n - 4^n$.

Exercice 2 [2 points]
Démontrer que, pour tout entier relatif a, on a : $a + 3|a^4 - 81$.

Exercice 3 [4 points]
Déterminer tous les entiers relatifs n vérifiant le système (S) : $\begin{cases} n-1|n^2-5 \\ n-1|n+4 \end{cases}$.

BONUS (0,5 pt)
Un élève dit :
« pour tous nombres a, b et c entiers relatifs : si $a|b$ et $a|c$ alors $a^2|(b+c)^2$ ».
Que penser de cette affirmation ?

Corrigé
Exercice 1
Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $7|11^n - 4^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_0 : « $7|11^n - 4^n$ ».
• initialisation
Si $n = 0$, $11^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ et $7|0$ donc P_0 est vraie.

• hérédité
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $7|11^k - 4^k$ » est vraie (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} : « $7|11^{k+1} - 4^{k+1}$ » est vraie.
On a : $7|11^k - 4^k$ $(H.R.)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $11^k - 4^k = 7\alpha$, autrement dit : $11^k = 7\alpha + 4^k$
On a :
$$\begin{aligned} 11^{k+1} - 4^{k+1} &= 11 \times 11^k - 4 \times 4^k = 11(7\alpha + 4^k) - 4 \times 4^k = 77\alpha + 11 \times 4^k - 4 \times 4^k \\ &= 77\alpha + 7 \times 4^k = 7(11\alpha + 4^k) \end{aligned}$$
Résumons : $11^{k+1} - 4^{k+1} = 7(11\alpha + 4^k)$.
Il existe $\alpha' \in \mathbb{Z}$ tel que $11^{k+1} - 4^{k+1} = 7\alpha'$, à savoir $\alpha' = 11\alpha + 4^k$, donc $7|11^{k+1} - 4^{k+1}$: P_{k+1} est vraie.

Conclusion
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, 7|11^n - 4^n$.

Exercice 2
Démontrer que, pour tout entier relatif a : $a + 3|a^4 - 81$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$, on a :
$$a^4 - 81 = (a^2)^2 - 9^2 = (a^2 + 9)(a^2 - 9) = (a^2 + 9)(a^2 - 3^2) = (a^2 + 9)(a - 3)(a + 3)$$
Résumons : $a^4 - 81 = (a^2 + 9)(a - 3)(a + 3)$.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a^4 - 81 = k(a + 3)$, à savoir $k = (a^2 + 9)(a - 3)$ donc $a + 3|a^4 - 81$.

Conclusion
Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a : $a + 3|a^4 - 81$.

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

Exercice 3

Déterminer tous les entiers relatifs $\boldsymbol{n}$ vérifiant le système $(\boldsymbol{S})$: $\begin{cases} \boldsymbol{n-1|n^2-5} \\ \boldsymbol{n-1|n+4} \end{cases}$

Analyse

$n-1|n^2-5$ et $n-1|n+4$ donc $n-1$ divise toute combinaison linéaire de n^2-5 et $n+4$,
en particulier : $n-1|n^2-5-n(n+4) \Leftrightarrow n-1|-5-4n \Leftrightarrow n-1|4n+5$
$n-1|4n+5$ et $n-1|n-1$ donc $n-1$ divise toute combinaison linéaire de $4n+5$ et $n-1$,
en particulier $n-1|4n+5-4(n-1) \Leftrightarrow n-1|9$ autrement dit $n-1$ est un diviseur de 9 dans $\mathbb{Z}$.
Les diviseurs 9 dans $\mathbb{Z}$ sont : -9, -3, -1, 1, 3 et 9 donc six cas seulement peuvent se présente :

- $n-1=-9 \Leftrightarrow n=-8$
- $n-1=-3 \Leftrightarrow n=-2$
- $n-1=-1 \Leftrightarrow n=0$
- $n-1=1 \Leftrightarrow n=2$
- $n-1=3 \Leftrightarrow n=4$
- $n-1=9 \Leftrightarrow n=10$

Il y a six « candidats » : -8, -2, 0, 2, 4 et 10.

Synthèse

- si $n=-8$
  $n-1=-9$
  $n^2-5=(-8)^2-5=64-5$
  $=59$
  $non(-9|59)$
  $n=-8$ est rejeté
- si $n=-2$
  $n-1=-3$
  $n^2-5=(-2)^2-5=-1$
  $non(-3|-1)$
  $n=-2$ est rejeté
- si $n=0$
  $n-1=-1$
  -1 divise tout entier relatif
  $n=0$ est accepté ✓
- si $n=2$
  $n-1=1$
  1 divise tout entier relatif
  $n=2$ est accepté ✓
- si $n=4$
  $n-1=3$
  $n^2-5=4^2-3=13$
  $non(3|13)$
  $n=4$ est rejeté
- si $n=10$
  $n-1=9$
  $n^2-5=10^2-5=95$
  $non(9|95)$
  $n=10$ est rejeté

Conclusion : **les solutions de $(\boldsymbol{S})$ dans $\mathbb{Z}$ sont 0 et 2**.

BONUS

Un élève : « pour tout $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ entiers relatifs, si $\boldsymbol{a|b}$ et $\boldsymbol{a|c}$ alors $\boldsymbol{a^2|(b+c)^2}$ ». Que penser de cette affirmation ?

Soient a,b et c des entiers relatifs tels que $a|b$ et $a|c$.
$a|b$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b=ka$
$a|c$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c=k'a$
On a : $(b+c)^2=(ka+k'a)^2=[(k+k')a]^2=(k+k')^2 \times a^2$
Il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $(b+c)^2=k'' \times a^2$, à savoir $k''=(k+k')^2$, donc $a^2|(b+c)^2$, par conséquent l'**affirmation de cet élève est exacte**.

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.